

Relaciones V

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

- 1 Motivación
- 2 Conjunto Parcialmente Ordenado (Poset)
- 3 Orden Lexicográfico
- 4 Diagramas de Hasse
- 5 Elementos Maximales y Minimales
- 6 Retículos
- 7 Ejercicios

- A menudo usamos relaciones para ordenar algunos o todos los elementos de los conjuntos.

- Por ejemplo, ordenamos las palabras usando la relación que contiene pares de palabras (x, y) , donde x está antes que y en el diccionario.

- Programamos proyectos usando la relación que consta de pares (x, y) , donde x y y son tareas en un proyecto de manera que x debe completarse antes de que comience y .

- Ordenamos el conjunto de números enteros usando la relación que contiene los pares (x, y) , donde x es menor que y .

- Cuando agregamos todos los pares de la forma (x, x) a estas relaciones, obtenemos una relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- Estas son propiedades que caracterizan las relaciones utilizadas para ordenar los elementos de los conjuntos.

Definición 1

Una relación R sobre un conjunto S se denomina *ordenamiento parcial* u *orden parcial* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un conjunto S junto con un orden parcial R se denomina *conjunto parcialmente ordenado*, o *poset*, y se denota por (S, R) . Los miembros de S se denominan elementos del poset.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Demuestre que la relación mayor o igual que (\geq) es un ordenamiento parcial en el conjunto de números enteros.

Ejemplo 1

Demuestre que la relación mayor o igual que (\geq) es un ordenamiento parcial en el conjunto de números enteros.

Solución:

- Debido a que $a \geq a$ para todo entero a , \geq es reflexiva.

Ejemplo 1

Demuestre que la relación mayor o igual que (\geq) es un ordenamiento parcial en el conjunto de números enteros.

Solución:

- Si $a \geq b$ y $b \geq a$, entonces $a = b$; por tanto, \geq es antisimétrica.

Ejemplo 1

Demuestre que la relación mayor o igual que (\geq) es un ordenamiento parcial en el conjunto de números enteros.

Solución:

- Finalmente, \geq es transitiva porque $a \geq b$ y $b \geq c$ implican que $a \geq c$.

Ejemplo 1

Demuestre que la relación mayor o igual que (\geq) es un ordenamiento parcial en el conjunto de números enteros.

Solución:

- De ello se deduce que \geq es un orden parcial sobre el conjunto de números enteros y (\mathbb{Z}, \geq) es un poset. □

Ejemplo 2

Ejemplo 2

La relación de divisibilidad $|$ es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de números enteros positivos, porque es reflexiva, antisimétrica y transitiva, como se mostró en la sección 2.1. Vemos que $(\mathbb{Z}^+, |)$ es un poset. Recuerde que $(\mathbb{Z}^+$ denota el conjunto de enteros positivos). \square

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Demuestre que la relación de inclusión \subseteq es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de potencias de un conjunto S .

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Demuestre que la relación de inclusión \subseteq es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de potencias de un conjunto S .

Solución:

- Como $A \subseteq A$ siempre que A es un subconjunto de S , \subseteq es reflexiva.

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Demuestre que la relación de inclusión \subseteq es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de potencias de un conjunto S .

Solución:

- Es antisimétrica porque $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ implican que $A = B$.

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Demuestre que la relación de inclusión \subseteq es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de potencias de un conjunto S .

Solución:

- Finalmente, \subseteq es transitiva, porque $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ implican que $A \subseteq C$.

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Demuestre que la relación de inclusión \subseteq es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de potencias de un conjunto S .

Solución:

- Por lo tanto, \subseteq es un ordenamiento parcial sobre $\mathcal{P}(S)$, y $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un poset. \square

Ejemplo 4

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de personas tal que xRy si x y y son personas y x es mayor que y . Muestre que R no es un ordenamiento parcial.

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de personas tal que xRy si x y y son personas y x es mayor que y . Muestre que R no es un ordenamiento parcial.

Solución:

- Tenga en cuenta que R es antisimétrica porque si una persona x es mayor que una persona y , entonces y no es mayor que x . Es decir, si xRy , entonces $\neg yRx$.

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de personas tal que xRy si x y y son personas y x es mayor que y . Muestre que R no es un ordenamiento parcial.

Solución:

- La relación R es transitiva porque si la persona x es mayor que la persona y y y es mayor que la persona z , entonces x es mayor que z . Es decir, si xRy y yRz , entonces xRz .

Ejemplo 4

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de personas tal que xRy si x y y son personas y x es mayor que y . Muestre que R no es un ordenamiento parcial.

Solución:

- Sin embargo, R no es reflexiva, porque ninguna persona es mayor que él o ella. Es decir, xRx para todas las personas x . De ello se deduce que R no es un ordenamiento parcial. □

- En diferentes posets, se utilizan distintos símbolos como \leq , \subseteq y $|$ para denotar un ordenamiento parcial.

- Sin embargo, necesitamos un símbolo que podamos usar cuando analicemos la relación de ordenamiento en un conjunto arbitrario.

- Habitualmente, la notación $a \preccurlyeq b$ se usa para denotar que $(a, b) \in R$ en un poset arbitrario (S, R) .

- Esta notación se usa porque la relación menor o igual a en el conjunto de números reales es el ejemplo más familiar de un orden parcial y el símbolo \preceq es similar al símbolo \leq .

- Tenga en cuenta que el símbolo \preceq se usa para denotar la relación en cualquier poset, no solo la relación menor o igual a.

- La notación $a \prec b$ denota que $a \preceq b$, pero $a \neq b$.

- Además, decimos “ a es menor que b ” o “ b es mayor que a ” si $a < b$.

- Cuando a y b son elementos del poset (S, \preceq) , no es necesario que $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

- Por ejemplo, en $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$, $\{1, 2\}$ no está relacionado con $\{1, 3\}$, y viceversa, porque ningún conjunto está contenido dentro del otro.

- De manera similar, en $(\mathbb{Z}^+, |)$, 2 no está relacionado con 3 y 3 no está relacionado con 2, porque $2 \nmid 3$ y $3 \nmid 2$.

- Esto conduce a la Definición 2.

Definición 2

Los elementos a y b de un poset (S, \preceq) se denominan *comparables* si $a \preceq b$ o $b \preceq a$. Cuando a y b son elementos de S tales que ni $a \preceq b$ ni $b \preceq a$, a y b se denominan *incomparables*.

Ejemplo 5

Ejemplo 5

En el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$, ¿son comparables los números enteros 3 y 9? ¿Son comparables el 5 y el 7?

Ejemplo 5

Ejemplo 5

En el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$, ¿son comparables los números enteros 3 y 9? ¿Son comparables el 5 y el 7?

Solución:

- Los enteros 3 y 9 son comparables, porque $3|9$.

Ejemplo 5

Ejemplo 5

En el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$, ¿son comparables los números enteros 3 y 9? ¿Son comparables el 5 y el 7?

Solución:

- Los enteros 5 y 7 son incomparables, porque $5 \nmid 7$ y $7 \nmid 5$. □

Conjunto totalmente ordenado

- El adjetivo “parcial” se utiliza para describir ordenamientos parciales porque algunos pares de elementos pueden ser incomparables.

- Cuando cada dos elementos del conjunto son comparables, la relación se denomina **orden total**.

Definición 3

Si (S, \preccurlyeq) es un poset y cada dos elementos de S son comparables, S se llama un *conjunto totalmente ordenado* o *linealmente ordenado*, y \preccurlyeq se llama *orden total* u *orden lineal*. Un conjunto totalmente ordenado también se llama *cadena*.

Ejemplo 6

El poset (\mathbb{Z}, \leq) está totalmente ordenado, porque $a \leq b$ o $b \leq a$ siempre que a y b son números enteros. \square

Ejemplo 7

El poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ no está totalmente ordenado porque contiene elementos incomparables, como 5 y 7. □

Definición 4

(S, \preceq) es un *conjunto bien ordenado* si es un poset tal que \preceq es un ordenamiento total y cada subconjunto no vacío de S tiene un elemento mínimo.

Ejemplo 8

- El conjunto de pares ordenados de enteros positivos, $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, con $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$ si $a_1 < b_1$, o si $a_1 = b_1$ y $a_2 \leq b_2$ (el orden lexicográfico), es un conjunto bien ordenado.

Ejemplo 8

- El conjunto \mathbb{Z} , con el orden \leq habitual, no está bien ordenado porque el conjunto de enteros negativos, que es un subconjunto de \mathbb{Z} , no tiene elemento mínimo. □

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si

PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si

PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Suponga que no es el caso de que $P(x)$ sea verdadero para todo $x \in S$.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si

PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Entonces hay un elemento $y \in S$ tal que $P(y)$ es falso.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si

PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- En consecuencia, el conjunto $A = \{x \in S \mid P(x) \text{ es falso}\}$ no está vacío.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si

PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Como S está bien ordenado, A tiene un elemento mínimo a .

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si

PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Por la elección de a como elemento mínimo de A , sabemos que $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$ con $x \prec a$.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si

PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Esto implica que el paso inductivo $P(a)$ es cierto.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si

PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Esta contradicción muestra que $P(x)$ debe ser verdadero para todo $x \in S$.

Observación 1

- No necesitamos un paso base en una demostración que utilice el principio de inducción bien ordenada porque si x_0 es el elemento menor de un conjunto bien ordenado, el paso inductivo nos dice que $P(x_0)$ es verdadero.

Observación 1

- Esto se debe a que no hay elementos $x \in S$ con $x \prec x_0$, por lo que sabemos (usando una prueba vacía) que $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec x_0$.

- Las palabras en un diccionario se enumeran en orden alfabético o lexicográfico, basándose en el orden de las letras en el alfabeto.

- Este es un caso especial de un ordenamiento de cadenas en un conjunto construido a partir de una ordenamiento parcial en el conjunto.

- Mostraremos cómo funciona esta construcción en cualquier poset.

- Primero, mostraremos cómo construir un ordenamiento parcial sobre el producto cartesiano de dos posets, (A_1, \preceq_1) y (A_2, \preceq_2) .

Orden Lexicográfico II

- El orden lexicográfico \preceq sobre $A_1 \times A_2$ se define especificando que un par es menor que un segundo par si la primera entrada del primer par es menor que (en A_1) la primera entrada del segundo par, o si las primeras entradas son iguales, pero la segunda entrada de este par es menor que (en A_2) la segunda entrada del segundo par.

- En otras palabras, (a_1, a_2) es menor que (b_1, b_2) , es decir,

$$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2),$$

ya sea que $a_1 \prec_1 b_1$ o si ambos $a_1 = b_1$ y $a_2 \prec_2 b_2$.

- Obtenemos un ordenamiento parcial \preccurlyeq agregando igualdad al ordenamiento \prec sobre $A_1 \times A_2$.

- La verificación de esto se deja como ejercicio.

Ejemplo 9

Determine si $(3, 5) \prec (4, 8)$, si $(3, 8) \prec (4, 5)$ y si $(4, 9) \prec (4, 11)$ en el poset $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \prec)$, donde \prec es el orden lexicográfico construido a partir de la relación \leq habitual sobre \mathbb{Z} .

Solución:

- Como $3 < 4$, se sigue que $(3, 5) \prec (4, 8)$ y que $(3, 8) \prec (4, 5)$.
- Tenemos $(4, 9) \prec (4, 11)$, porque las primeras entradas de $(4, 9)$ y $(4, 11)$ son iguales pero $9 < 11$.

□

Orden Lexicográfico III

En la Figura 1 se resaltan los pares ordenados en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que son menores que $(3, 4)$.

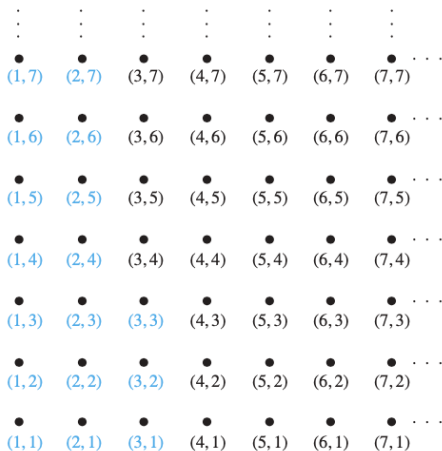


Figura 1: Los pares ordenados menores que $(3, 4)$ en orden lexicográfico.

- Un orden lexicográfico se puede definir sobre el producto cartesiano de n posets $(A_1, \preceq_1), (A_2, \preceq_2), \dots, (A_n, \preceq_n)$.

- Defina el orden parcial \preceq sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ mediante

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \prec (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

si $a_1 \prec_1 b_1$, o si hay un número entero $i > 0$ tal que $a_1 = b_1, \dots, a_i = b_i$ y $a_{i+1} \prec_{i+1} b_{i+1}$.

- En otras palabras, una n -tupla es menor que una segunda n -tupla si la entrada de la primera n -tupla en la primera posición donde las dos n -tuplas no concuerdan es menor que la entrada en esa posición en la segunda n -tupla.

Ejemplo 10

- Tenga en cuenta que $(1, 2, 3, 5) < (1, 2, 4, 3)$, porque las entradas en las dos primeras posiciones de estas 4-tuplas coinciden, pero en la tercera posición la entrada en la primera 4-tupla, 3, es menor que en la segunda 4-tupla, 4.

Ejemplo 10

- Aquí el orden en 4-tuplas es el orden lexicográfico que proviene de la relación habitual menor o igual a en el conjunto de números enteros.



- Ahora podemos definir el orden lexicográfico de cadenas.

- Considere las cadenas $a_1a_2 \cdots a_m$ y $b_1b_2 \cdots b_n$ sobre un poset S parcialmente ordenado.

- Considere las cadenas $a_1a_2 \cdots a_m$ y $b_1b_2 \cdots b_n$ sobre un poset S parcialmente ordenado.
- Suponga que estas cadenas no son iguales. Sea t el mínimo de m y n .

- La definición de ordenamiento lexicográfico es que la cadena $a_1a_2\cdots a_m$ es menor que $b_1b_2\cdots b_n$ si y sólo si

$$(a_1, a_2, \dots, a_t) \prec (b_1, b_2, \dots, b_t), \text{ o}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_t) = (b_1, b_2, \dots, b_t), \text{ y } m < n,$$

donde \prec en esta desigualdad representa el orden lexicográfico de S^t .

- En otras palabras, para determinar el orden de dos cadenas diferentes, la cadena más larga se trunca a la longitud de la cadena más corta, es decir, $t = \min(m, n)$ términos.

- Luego, las t -tuplas compuestas por los primeros t términos de cada cadena se comparan usando el orden lexicográfico en S^t .

- Una cadena es menor que otra cadena si la t -tupla correspondiente a la primera cadena es menor que la t -tupla de la segunda cadena, o si estas dos t -tuplas son iguales, pero la segunda cadena es más larga.

Ejemplo 11

- Considere el conjunto de cadenas de letras minúsculas en inglés.

Ejemplo 11

- Usando el orden de las letras en el alfabeto, se puede construir un orden lexicográfico sobre el conjunto de cadenas.

Ejemplo 11

- Una cadena es menor que una segunda cadena si la letra en la primera cadena en la primera posición donde las cadenas difieren es anterior a la letra en la segunda cadena en esta posición, o si la primera cadena y la segunda cadena concuerdan en todas las posiciones, pero la segunda cadena tiene más letras.

Ejemplo 11

- Este orden es el mismo que se utiliza en los diccionarios.

Ejemplo 11 II

- Por ejemplo,

discreet \prec *discrete*,

porque estas cadenas difieren primero en la séptima posición, y $e \prec t$.

- También,

discreet \prec *discreetness*,

porque las primeras ocho letras concuerdan, pero la segunda cadena es más larga.

- Además,

$discrete \prec discretion,$

porque

$discrete \prec discreti.$



Diagramas de Hasse I

- No es necesario mostrar muchas aristas en el grafo dirigido para un poset finito porque deben estar presentes.

- Por ejemplo, considere el grafo dirigido para el orden parcial $\{(a, b) | a \leq b\}$ en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, que se muestra en la Figura 2 (a).

- Debido a que esta relación es un ordenamiento parcial, es reflexiva y su grafo dirigido tiene bucles en todos los vértices.

- En consecuencia, no tenemos que mostrar estos bucles porque deben estar presentes; en la Figura 2 (b) no se muestran los bucles.

- Ya que un ordenamiento parcial es transitivo, no tenemos que mostrar esas aristas que deben estar presentes debido a la transitividad.

- Por ejemplo, en la Figura 2 (c) las aristas $(1, 3)$, $(1, 4)$ y $(2, 4)$ no se muestran porque deben estar presentes.

- Si asumimos que todas las aristas apuntan "hacia arriba" (como están dibujados en la figura), no tenemos que mostrar las direcciones de las aristas; la figura 2 (c) no muestra direcciones.

Diagramas de Hasse II

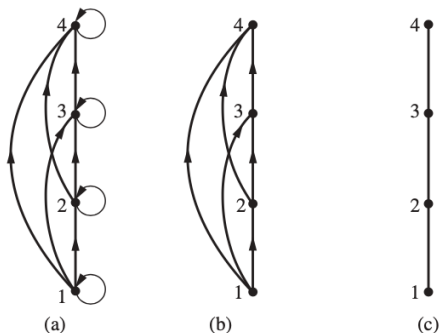


Figura 2: Construcción del diagrama de Hasse para $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$.

Diagramas de Hasse III

- En general, podemos representar un poset finito (S, \preceq) usando este procedimiento: Comience con el grafo dirigido para esta relación.

- Debido a que un ordenamiento parcial es reflexivo, un bucle (a, a) está presente en cada vértice a . Elimine estos bucles.

- A continuación, elimine todas las aristas que deban estar en el orden parcial debido a la presencia de otras aristas y transitividad. Es decir, elimine todas las aristas (x, y) para las que hay un elemento $z \in S$ tal que $x \prec z$ y $z \prec y$.

- Finalmente, ordene cada arista de modo que su vértice inicial esté debajo de su vértice terminal.

- Elimine todas las flechas en las aristas dirigidas, porque todas las aristas apuntan “hacia arriba” hacia su vértice terminal.

Diagramas de Hasse IV

- Estos pasos están bien definidos y sólo es necesario realizar un número finito de pasos para un poset finito.

- Cuando se han dado todos los pasos, el diagrama resultante contiene información suficiente para encontrar el orden parcial, como explicaremos más adelante.

- El diagrama resultante se llama **diagrama de Hasse** de (S, \preceq) , y recibe su nombre del matemático alemán del siglo XX Helmut Hasse, que hizo un uso extensivo de ellos.

- Sea (S, \preceq) un poset.

- Decimos que un elemento $y \in S$ **cubre** un elemento $x \in S$ si $x \prec y$ y no hay ningún elemento $z \in S$ tal que $x \prec z \prec y$.

- El conjunto de pares (x, y) tal que y cubre x se llama la **relación de cobertura** de (S, \preceq) .

- De la descripción del diagrama de Hasse de un poset, vemos que las aristas en el diagrama de Hasse de (S, \preceq) son aristas apuntando hacia arriba que corresponden a los pares en la relación de cobertura de (S, \preceq) .

- Además, podemos recuperar un poset de su relación de cobertura, porque es la cerradura transitiva y reflexiva de su relación de cobertura.

- Esto nos dice que podemos construir un ordenamiento parcial a partir de su diagrama de Hasse.

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solución:

- Comience con el digrafo para este orden parcial, como se muestra en la Figura 3 (a).

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solución:

- Retire todos los bucles, como se muestra en la Figura 3 (b).

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solución:

- Luego elimine todas las aristas implicadas por la propiedad transitiva.

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solución:

- Estas son $(1, 4)$, $(1, 6)$, $(1, 8)$, $(1, 12)$, $(2, 8)$, $(2, 12)$ y $(3, 12)$.

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solución:

- Organice todas las aristas para que apunten hacia arriba y elimine todas las flechas para obtener el diagrama de Hasse.

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solución:

- El diagrama de Hasse resultante se muestra en la Figura 3 (c).

Ejemplo 12 II

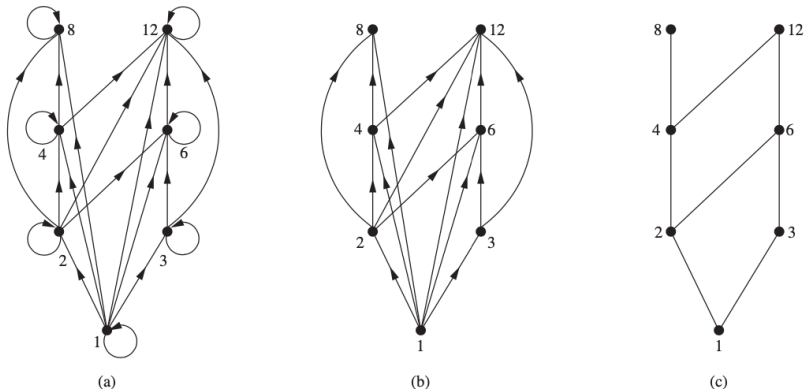


Figura 3: Construcción del diagrama de Hasse para $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$.



Ejemplo 13

Dibuje el diagrama de Hasse para el orden parcial $\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$, donde $S = \{a, b, c\}$.

Ejemplo 13

Dibuje el diagrama de Hasse para el orden parcial $\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$, donde $S = \{a, b, c\}$.

Solución:

- El diagrama de Hasse para este ordenamiento parcial se obtiene a partir del digrafo asociado eliminando todos los bucles y todos las aristas que se producen por la transitividad.

Ejemplo 13

Dibuje el diagrama de Hasse para el orden parcial $\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$, donde $S = \{a, b, c\}$.

Solución:

- A saber, $(\emptyset, \{a, b\})$, $(\emptyset, \{a, c\})$, $(\emptyset, \{b, c\})$, $(\emptyset, \{a, b, c\})$, $(\{a\}, \{a, b, c\})$, $(\{b\}, \{a, b, c\})$ y $(\{c\}, \{a, b, c\})$.

Ejemplo 13

Dibuje el diagrama de Hasse para el orden parcial $\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$, donde $S = \{a, b, c\}$.

Solución:

- Finalmente, todas las aristas apuntan hacia arriba y las flechas se eliminan.

Ejemplo 13

Dibuje el diagrama de Hasse para el orden parcial $\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$, donde $S = \{a, b, c\}$.

Solución:

- El diagrama de Hasse resultante se ilustra en la Figura 4.

Ejemplo 13 II

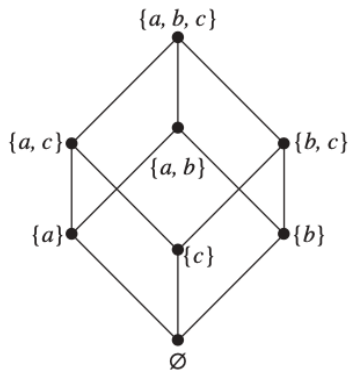


Figura 4: El diagrama de Hasse para $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

□

Elementos Maximales y Minimales I

- Los elementos de los posets que tienen ciertas propiedades extremas son importantes para muchas aplicaciones.

- Un elemento de un poset se llama maximal si no es menor que cualquier elemento del poset. Es decir, a es **maximal** en el poset (S, \preceq) si no hay $b \in S$ tal que $a \prec b$.

- De manera similar, un elemento de un poset se llama minimal si no es mayor que cualquier elemento del poset.

- Es decir, a es **minimal** si no hay ningún elemento $b \in S$ tal que $b \prec a$.

- Los elementos maximales y minimales son fáciles de detectar mediante un diagrama de Hasse, son los elementos “superiores” e “inferiores” del diagrama.

Ejemplo 14

¿Qué elementos del poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ son maximales y cuáles son minimales?

Ejemplo 14

¿Qué elementos del poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ son maximales y cuáles son minimales?

Solución:

- El diagrama de Hasse en la Figura 5 para este poset muestra que los elementos maximales son 12, 20 y 25, los elementos minimales son 2 y 5.

Ejemplo 14

¿Qué elementos del poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ son maximales y cuáles son minimales?

Solución:

- Como muestra este ejemplo, un poset puede tener más de un elemento maximal y más de un elemento minimal.

Ejemplo 14 II

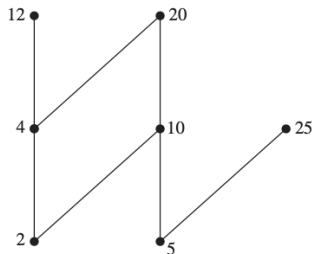


Figura 5: El diagrama de Hasse para $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$.



- A veces hay un elemento en un poset que es mayor que cualquier otro elemento.

- Tal elemento se llama el elemento más grande (mayor).

- Es decir, a es el **elemento más grande (mayor)** del poset (S, \preceq) si $b \preceq a$ para todo $b \in S$.

- El elemento más grande es único cuando existe.

- Del mismo modo, un elemento se denomina elemento más pequeño (menor) si es menor que todos los demás elementos del poset.

- Es decir, a es el **elemento más pequeño (menor)** de (S, \preceq) si $a \preceq b$ para todo $b \in S$.

- El elemento más pequeño es único cuando existe.

Ejemplo 15

Determine si los posets representados por cada uno de los diagramas de Hasse en la Figura 6 tienen un elemento mayor y un elemento menor.

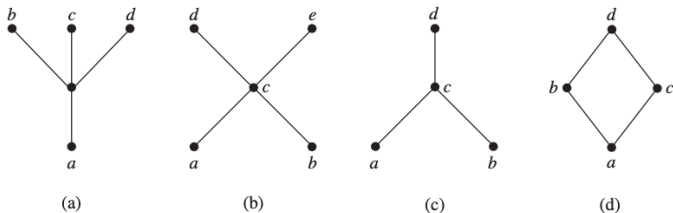


Figura 6: Diagramas de Hasse para el Ejemplo 15.

Solución:

- El elemento menor del poset con diagrama de Hasse (a) es a , este poset no tiene elemento mayor.

Solución:

- El poset con diagrama de Hasse (b) no tiene ni un elemento menor ni uno mayor.

Solución:

- El poset con diagrama de Hasse (c) no tiene ningún elemento menor, su elemento mayor es d .

Solución:

- El poset con diagrama de Hasse (d) tiene el elemento menor a y el elemento mayor d .



Ejemplo 16

Sea S un conjunto. Determine si hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.

Ejemplo 16

Sea S un conjunto. Determine si hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.

Solución:

- El elemento menor es el conjunto vacío, porque $\emptyset \subseteq T$ para cualquier subconjunto T de S .

Ejemplo 16

Sea S un conjunto. Determine si hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.

Solución:

- El conjunto S es el elemento más grande en este conjunto, porque $T \subseteq S$ siempre que T es un subconjunto de S .

□

Ejemplo 17

¿Hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$?

Ejemplo 17

¿Hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$?

Solución:

- El número entero 1 es el elemento menor porque $1|n$ siempre que n es un número entero positivo.

Ejemplo 17

¿Hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$?

Solución:

- Debido a que no hay un número entero que sea divisible por todos los números enteros positivos, no hay ningún elemento mayor.



- A veces es posible encontrar un elemento que sea mayor o igual que todos los elementos de un subconjunto A de un poset (S, \preceq) .

- Si u es un elemento de S tal que $a \preceq u$ para todos los elementos $a \in A$, entonces u se llama una **cota superior** de A .

- Asimismo, puede haber un elemento menor o igual que todos los elementos en A .

- Si l es un elemento de S tal que $l \preccurlyeq a$ para todos los elementos $a \in A$, entonces l se llama una **cota inferior** de A .

Ejemplo 18 I

Ejemplo 18

Encuentre las cotas inferior y superior de los subconjuntos $\{a, b, c\}$, $\{j, h\}$ y $\{a, c, d, f\}$ en el poset con el diagrama de Hasse que se muestra en la Figura 7.

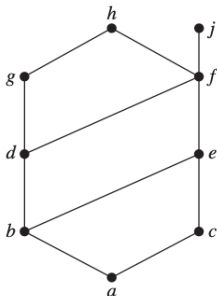


Figura 7: Diagrama de Hasse para el Ejemplo 18.

Solución:

- Las cotas superiores de $\{a, b, c\}$ son e, f, j y h , y su única cota inferior es a .

Solución:

- No existen cotas superiores de $\{j, h\}$ y sus cotas inferiores son a, b, c, d, e y f .

Solución:

- Las cotas superiores de $\{a, c, d, f\}$ son f, h y j y su cota inferior es a .



- El elemento x se llama la **cota superior mínima** del subconjunto A si x es una cota superior que es menor que cualquier otra cota superior de A .

- Debido a que solo hay uno de estos elementos, si existe, tiene sentido llamar a este elemento la cota superior mínima.

- Es decir, x es la cota superior mínima de A si $a \preceq x$ siempre que $a \in A$, y $x \preceq z$ siempre que z es una cota superior de A .

- De manera similar, el elemento y se llama la **cota inferior máxima** de A si y es una cota inferior de A y $z \preceq y$ siempre que z es una cota inferior de A .

- La cota inferior máxima de A es única si existe.

- La cota inferior máxima y la cota superior mínima de un subconjunto A se indican mediante $\text{glb}(A)$ y $\text{lub}(A)$, respectivamente.

Ejemplo 19

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de $\{b, d, g\}$, si existen, en el poset que se muestra en la Figura 7.

Ejemplo 19

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de $\{b, d, g\}$, si existen, en el poset que se muestra en la Figura 7.

Solución:

- Las cotas superiores de $\{b, d, g\}$ son g y h .

Ejemplo 19

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de $\{b, d, g\}$, si existen, en el poset que se muestra en la Figura 7.

Solución:

- Como $g \prec h$, g es la cota superior mínima.

Ejemplo 19

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de $\{b, d, g\}$, si existen, en el poset que se muestra en la Figura 7.

Solución:

- Las cotas inferiores de $\{b, d, g\}$ son a y b .

Ejemplo 19

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de $\{b, d, g\}$, si existen, en el poset que se muestra en la Figura 7.

Solución:

- Debido a que $a \prec b$, b es la cota inferior máxima.



Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Solución:

- Un número entero es una cota inferior de $\{3, 9, 12\}$ si 3, 9 y 12 son divisibles por este número entero.

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Solución:

- Los únicos números enteros son 1 y 3.

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Solución:

- Como $1|3$, 3 es cota inferior máxima de $\{3, 9, 12\}$.

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Solución:

- La única cota inferior para el conjunto $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ con respecto a $|$ es el elemento 1.

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Solución:

- Por lo tanto, 1 es la cota inferior máxima para $\{1, 2, 4, 5, 10\}$.

Ejemplo 20 II

- Un número entero es una cota superior para $\{3, 9, 12\}$ si y sólo si es divisible entre 3, 9 y 12.

Ejemplo 20 II

- Los números enteros con esta propiedad son los divisibles por el mínimo común múltiplo de 3, 9 y 12, que es 36.

- Por tanto, 36 es la cota superior mínima de $\{3, 9, 12\}$.

- Un entero positivo es una cota superior para el conjunto $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ si y sólo si es divisible por 1, 2, 4, 5 y 10.

- Los enteros con esta propiedad son aquellos enteros divisibles por el mínimo común múltiplo de estos enteros, que es 20.

- Por tanto, 20 es la cota superior mínima de $\{1, 2, 4, 5, 10\}$. □

- Un conjunto parcialmente ordenado en el que cada par de elementos tiene tanto una cota superior mínima como una cota inferior máxima se llama **retículo**.

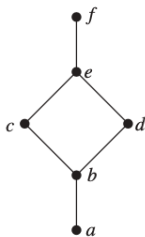
- Los retículos tienen muchas propiedades especiales.

- Además, los retículos se utilizan en muchas aplicaciones diferentes, como modelos de flujo de información, y desempeñan un papel importante en el álgebra booleana.

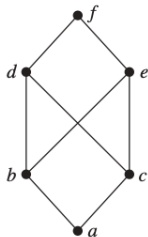
Ejemplo 21 I

Ejemplo 21

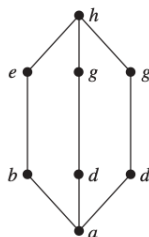
Determine si los posets representados por cada uno de los diagramas de Hasse en la Figura 8 son retículos.



(a)



(b)



(c)

Figura 8: Diagrama de Hasse para el Ejemplo 21.

Ejemplo 21 II

Solución:

- Los posets representados por los diagramas de Hasse en (a) y (c) son retículos porque en cada poset cada par de elementos tiene una cota superior mínima y una cota inferior máxima, como el lector debe verificar.

Solución:

- Por otro lado, el poset con el diagrama de Hasse que se muestra en (b) no es un retículo, porque los elementos b y c no tienen cota superior mínima.

Solución:

- Para ver esto, tenga en cuenta que cada uno de los elementos d , e y f es una cota superior, pero ninguno de estos tres elementos precede a los otros dos con respecto al orden de este poset.



Ejemplo 22

¿Es el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ un retículo?

Ejemplo 22

¿Es el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ un retículo?

Solución:

- Sean a y b dos números enteros positivos.

Ejemplo 22

¿Es el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ un retículo?

Solución:

- La cota superior mínima y la cota inferior máxima de estos dos números enteros son el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de estos números enteros, respectivamente, como el lector debe verificar.

Ejemplo 22

¿Es el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ un retículo?

Solución:

- De ello se deduce que este poset es un retículo.

Ejemplo 23

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ y $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ son retículos.

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ y $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ son retículos.

Solución:

- Debido a que 2 y 3 no tienen cotas superiores en $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$, ciertamente no tienen una cota superior mínima.

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ y $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ son retículos.

Solución:

- Por tanto, el primer poset no es un retículo.

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ y $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ son retículos.

Solución:

- Cada dos elementos del segundo conjunto tienen una cota superior mínima y una cota inferior máxima.

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ y $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ son retículos.

Solución:

- La cota superior mínima de dos elementos en este conjunto es el más grande de los elementos y la cota inferior máxima de dos elementos es el más pequeño de los elementos, como el lector debe verificar.

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ y $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ son retículos.

Solución:

- Por tanto, este segundo poset es un retículo. □

Ejemplo 24

Determina si $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo donde S es un conjunto.

Ejemplo 24

Determina si $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo donde S es un conjunto.

Solución:

- Sean A y B dos subconjuntos de S .

Ejemplo 24

Determina si $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo donde S es un conjunto.

Solución:

- La cota superior mínima y la cota inferior máxima de A y B son $A \cup B$ y $A \cap B$, respectivamente, como puede mostrar el lector.

Ejemplo 24

Determina si $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo donde S es un conjunto.

Solución:

- Por tanto, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo. □

- 1 ¿Cuáles de estas relaciones sobre $\{0, 1, 2, 3\}$ son órdenes parciales? Determine las propiedades, de un orden parcial, de las que carecen las que no lo son.
- $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$.
 - $(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)$.
 - $(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)$.
 - $(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)$.
 - $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)$.
- 2 ¿Cuáles de estos son posets?
- $(\mathbb{Z}, =)$.
 - (\mathbb{Z}, \neq) .
 - (\mathbb{Z}, \geq) .
 - $(\mathbb{Z}, /)$.
- 3 Encuentre el orden lexicográfico de estas cadenas de letras minúsculas en inglés:
- quack, quick, quicksilver, quicksand, quacking.*
 - open, opener, opera, operand, opened.*
 - zoo, zero, zoom, zoology, zoological.*

Ejercicios II

- 4 Dibuje un diagrama de Hasse para la divisibilidad sobre cada uno de los siguientes conjuntos:

1 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2 $\{3, 5, 7, 11, 13, 16, 17\}$

3 $\{2, 3, 5, 10, 11, 15, 25\}$

4 $\{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$

- 5 Dado el diagrama de Hasse de la Figura 9, realice lo siguiente:

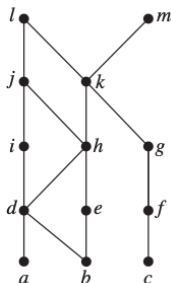


Figura 9: Diagrama de Hasse para el Ejercicio 5.

- 1 Encuentre los elementos maximales.
 - 2 Encuentre los elementos minimales.
 - 3 ¿Existe un elemento mayor?
 - 4 ¿Existe un elemento menor?
 - 5 Encuentre todas las cotas superiores de $\{a, b, c\}$.
 - 6 Encuentre la mínima cota superior de $\{a, b, c\}$, si existe.
 - 7 Encuentre todas las cotas inferiores de $\{f, g, h\}$.
 - 8 Encuentre la máxima cota inferior de $\{f, g, h\}$, si existe.
- 6 Sea (S, R) un poset. Muestre que (S, R^{-1}) también es un poset, donde R^{-1} es la inversa de R . El poset (S, R^{-1}) se llama **dual** de (S, R) .
- 7 Sea (S, \preceq) un poset, demuestre que si existe el(la):
- 1 elemento mayor, entonces es único.
 - 2 elemento menor, entonces es único.
 - 3 mínima cota superior, entonces es única.
 - 4 máxima cota inferior, entonces es única.

- 8 Determine si son retículos los posets cuyos diagramas de Hasse están dados en la Figura 10.

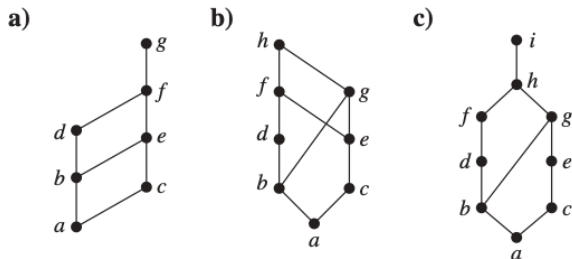


Figura 10: Diagramas de Hasse para el Ejercicio 8.